23 Maret 2010

TEORI RING LANJUT (MODUL PRIMA)

Samsul Arifin (09/290722/PPA/2875)
Yunita Septriana Anwar (08/275043/PPA/2614)

IDEAL PRIMA

Definisi 1: Misalkan R ring dan $I \subset R$ ideal. I disebut prima jika untuk setiap ideal-ideal $A, B \subseteq R$ dengan $AB \subseteq I$, maka $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$.

RING PRIMA

Definisi 2: Suatu ring R disebut prima jika untuk setiap dua ideal $A, B \subset R$ dengan $AB = 0$, maka $A = 0$ atau $B = 0$.

Definisi 3: Suatu ring R disebut prima jika 0 merupakan ideal prima.

Definisi 2 dan definisi 3 ekuivalen:

Diberikan untuk setiap dua ideal $A, B \subset R$ dengan $AB = 0$, maka $A = 0$ atau $B = 0$. Ditunjukkan $I = 0$ adalah ideal prima di R. Diambil sebarang ideal-ideal $A, B \subseteq R$ dengan $AB \subseteq I = 0$ atau $AB = 0$. Dari yang diketahui, diperoleh $A = 0 = I$ atau $B = 0 = I$. Sehingga $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$. Jadi $I = 0$ ideal prima di R.

Sebaliknya, diberikan $J = 0$ merupakan ideal prima di R. Diambil sebarang dua ideal $A, B \subset R$ dengan $AB = 0$. Karena $J = 0$, maka $AB = J$. Diberikan J merupakan ideal prima, sehingga $A \subseteq J$ atau $B \subseteq J$. Karena $0 = J \subseteq A$ dan $0 = J \subseteq B$, maka $A = 0$ atau $B = 0$.

Jadi definisi 2 dan definisi 3 ekuivalen.

Proposisi 1: Ideal $P \subset R$ prima jika dan hanya jika ring faktor R/P ring prima.

Bukti:

Diberikan $P \subset R$ ideal prima di R. Ditunjukkan R/P ring prima, yaitu dengan menunjukkan $\bar{0}$ merupakan ideal prima di R/P. Karena $\bar{0}$ di R/P adalah P dan P ideal prima, maka $\bar{0}$ ideal prima di R/P.

Sebaliknya diberikan R/P ring prima, berarti $\bar{0}$ ideal prima di R/P. Karena $\bar{0}$ di R/P adalah P dan $\bar{0}$ ideal prima, maka P ideal prima.

ANNHILATOR

Definisi 4: Untuk sebarang subset tak kosong $K \subset M$ dinotasikan annhilator dari K dengan

$$Ann_R(K) \coloneqq \{r \in R | rk = 0, \text{untuk semua } k \in K\}$$

Untuk sebarang K submodul dari M R-modul, didefinisikan himpunan $(K{:}\,M) = \{r \in R | rM \subseteq K\}$.

$(K{:}\,M)$ merupakan annhilator dari M/K R-modul, yaitu:

$Ann_R(M/K) = \{r \in R | r\bar{m} = \bar{0}, \forall \bar{m} \in M/K\} = \{r \in R | \overline{rm} = \bar{0}, \forall \bar{m} \in M/K\} = \{r \in R | rm \in K,\ \forall m \in M\} = \{r \in R | rM \subseteq K\} = (K{:}\,M)$

Lemma 1: Untuk sebarang submodul K dari M, berlaku

$$Ann_R(K)Ann_R(M/K) \subseteq Ann_R(M)$$

Bukti:

Diambil sebarang $x \in Ann_R(K)$ dan $y \in Ann_R(M/K)$. Berarti $xk = 0$ untuk setiap $k \in K$ dan $y\bar{m} = \bar{0}$ untuk setiap $\bar{m} \in M/K$. Dari $y\bar{m} = \bar{0}$ diperoleh $ym \in K$ atau $yM \subset K$. Dari sini, $xyM \subset xK$=0. Akibatnya $xy \in Ann_R(M)$. Jadi $Ann_R(K)Ann_R(M/K) \subseteq Ann_R(M)$.

SUBMODUL PRIMA

Definisi 5: Diberikan M adalah R-modul dan N submodul di M. N disebut submodul prima jika N merupakan submodul sejati M dan untuk setiap $r \in R$, $m \in M$ berlaku jika $rm \in N$ maka $m \in N$ atau $r \in (N{:}\,M)$ dengan $(N{:}\,M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$.

Definisi 6: Untuk sebarang M R-modul dan N submodul di M, N disebut submodul prima jika N merupakan submodul sejati dan untuk setiap $r \in R, m \in M \backslash N$ berlaku jika $rm \in N$, maka $r \in (N: M)$.

Contoh: Submodul $\{0\}$ dalam $\mathbb{Z}_5$ $\mathbb{Z}$-modul adalah submodul prima karena untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}_5 \backslash \{0\}$, jika $rm = 0$ maka $r \in (\{0\}: \mathbb{Z}_5) = 5\mathbb{Z}$, tetapi submodul $\{0\}$ dalam $\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$-modul bukanlah submodul prima karena terdapat $3 \in \mathbb{Z}$ dan $2 \in \mathbb{Z}_6 \backslash \{0\}$ sehingga berlaku $3 \cdot 2 = 0$ di $\mathbb{Z}_6$ tetapi $3 \cdot \mathbb{Z}_6 \neq \{0\}$.

SIFAT-SIFAT DARI SUBMODUL PRIMA

Teorema 1: Untuk suatu M R-modul, submodul K di M, dan ideal annhilator $(K: M) = Ann_R(M/K)$ di ring R. Maka pernyataan berikut ekuivalen:

(1) K submodul prima

(2) Setiap submodul taknol di M/K memiliki annhilator yang sama.

Bukti:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Diketahui K merupakan submodul prima di M R-modul. Diambil sebarang submodul taknol N/K di M/K R-modul. Ditunjukkan $Ann_R(M/K) = Ann_R(N/K)$. Karena K submodul di M R-modul, maka berlaku $Ann_R(M/K) \subseteq Ann_R(N/K)$. Sebaliknya karena diberikan K submodul prima, maka untuk sebarang $m \in M \backslash K$ dan $r \in R$, jika $rm \in K$ maka $r \in (K: M)$. Dengan kata lain, untuk sebarang $r \in Ann_R(N/K)$ maka berlaku $r \in Ann_R(M/K)$. Jadi $Ann_R(N/K) \subseteq Ann_R(M/K)$. Dengan demikian $Ann_R(M/K) = Ann_R(N/K)$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Diketahui setiap submodul tak nol di M/K R-modul memiliki annhilator yang sama, yaitu $Ann_R(M/K) = Ann_R(N/K)$. Diambil sebarang $m \in M \backslash K$ dan $r \in R$ dengan $rm \in K$. Karena $1 \in R$ maka $m = 1 \cdot m \in K$. Selanjutnya dibentuk submodul tak nol yang memuat K, yaitu $\langle m + K \rangle = \langle \overline{m} \rangle$ di M/K R-modul. Dari hipotesis, diperoleh $Ann_R(\langle \overline{m} \rangle) = Ann_R(M/K)$, yang artinya setiap $r \in Ann_R(\langle \overline{m} \rangle)$ maka berlaku $r \in Ann_R(M/K)$. Dengan kata lain, untuk sebarang $m \in M \backslash K$ dan $r \in R$ dengan $rm \in K$ berlaku $r \in Ann_R(M/K)$, yang artinya K submodul prima di M R-modul.

FULLY INVARIANT SUBMODULE

Definisi 7: Misalkan K submodul dari M. Jika untuk sebarang $f \in End_R(M)$ berlaku $(K)f \subseteq K$, maka K disebut *fully invariant* submodul dari M.

MODUL *FAITHFUL*

Definisi 8: Misalkan M adalah R-modul. M disebut modul *faithful* jika $Ann_R(M) = \{0\}$.

MODUL PRIMA

Definisi 9: Jika diberikan M adalah R-modul, maka M disebut R-modul prima jika $\{0\}$ adalah submodul prima di M.

Contoh: $\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}$-modul adalah modul prima, karena untuk sebarang $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, jika$rm = 0$ maka $0 = r \in (\{0\}:\mathbb{Z})$. Dengan kata lain, $\{0\}$ merupakan submodul prima di $\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}$-modul. Dengan demikian, $\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}$-modul merupakan modul prima.

Akibat 1: M R-modul disebut prima jika dan hanya jika setiap submodul tak nol di M memiliki annhilator yang sama, yaitu $Ann_R(M)$.

Bukti:

Diketahui M adalah R-modul prima. Dari sini diperoleh $\{0\}$ adalah submodul prima di M. Dari Teorema 1 diperoleh setiap submodul tak nol di $M/\{0\}$ memiliki annhilator yang sama. Perhatikan bahwa: $M/\{0\} = \{m + \{0\} \mid \forall m \in M\} = \{m \mid \forall m \in M\} = M$ dan $(\{0\}: M) = \{r \in R | rM = 0\} = Ann_R(M)$. Berarti ini ekuivalen dengan mengatakan untuk sebarang submodul taknol di M memiliki annhilator yang sama dengan M, yaitu $Ann_R(M)$.

Proposisi 2: Misalkan R adalah ring dan M adalah R-modul. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

(a) $\bar{R} = R/Ann_R(M)$ adalah ring prima.

(b) Untuk sebarang submodul K dari M, $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ atau $Ann_R(M/K) = Ann_R(M)$.

Bukti:

$(a) \Rightarrow (b)$

Karena K submodul dari M, maka jelas berlaku $Ann_R(M) \subseteq Ann_R(K)$. Dilain pihak $Ann_R(M) \subseteq Ann_R(M/K)$, karena untuk sebarang $x \in Ann_R(M)$, berlaku $xm = 0$ untuk setiap $m \in M$. Diambil sebarang $\overline{m} \in M/K$, maka $x \cdot \overline{m} = x(m + K) = xm + xK = 0$, karena $x \in Ann_R(M)$. Jadi $x \in Ann_R(M/K)$. Sehingga tinggal ditunjukkan $Ann_R(K) \subseteq Ann_R(M)$ atau $Ann_R(M/K) \subseteq Ann_R(M)$. Karena $R/Ann_R(M)$ adalah ring prima, maka $Ann_R(M)$ adalah ideal prima di R. Di lain pihak dari lemma 1 diperoleh $Ann_R(K)Ann_R(M/K) \subseteq Ann_R(M)$ dan $Ann_R(M)$ adalah ideal prima, maka $Ann_R(K) \subseteq Ann_R(M)$ atau $Ann_R(M/K) \subseteq Ann_R(M)$. Mengingat $Ann_R(M) \subseteq Ann_R(K)$ dan $Ann_R(M) \subseteq Ann_R(M/K)$, diperoleh $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ atau $Ann_R(M/K) = Ann_R(M)$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Untuk sebarang submodul K dari M, $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ atau $Ann_R(M/K) = Ann_R(M)$. Ditunjukkan $\bar{R} = R/Ann_R(M)$ adalah ring prima. Dengan menggunakan proposisi 1, cukup ditunjukkan $Ann_R(M)$ adalah ideal prima. Diambil sebarang I, J ideal-ideal di R dengan $IJ \subseteq Ann_R(M)$, berarti $IJM = 0$. Perhatikan bahwa $JM = \{ab | a \in J, b \in M\}$, karena M adalah R-modul dan J ideal di R, maka $JM \subseteq M$. Lebih lanjut JM merupakan submodul dari M. Dari (b) diperoleh $Ann_R(JM) = Ann_R(M)$ atau $Ann_R(M/JM) = Ann_R(M)$.

Jika $JM = M$, maka $M/JM = \{0\}$. Akibatnya $Ann_R(M) = Ann_R(M/JM) = Ann_R(\{0\}) = R$, ini belum tentu terjadi, yang hanya kita ketahui bahwa $Ann_R(M) \subseteq R$, sehingga $Ann_R(M) \neq Ann_R(M/JM)$. Karena $IJM = 0$, maka $I \subseteq Ann_R(JM) = Ann_R(M)$. Jadi $I \subseteq Ann_R(M)$.

Jika $JM \neq M$ dan $I \nsubseteq Ann_R(M)$, maka $I \subseteq Ann_R(JM)$ mengingat $IJM = 0$. Dilain pihak, $JM \neq M$ mengakibatkan $Ann_R(JM) \neq Ann_R(M)$. Diambil sebarang $a \in J$ dan $\overline{m} \in M/JM$. Perhatikan bahwa $a \cdot \overline{m} = a \cdot (m + JM) = am + aJM = am + JM = 0$, karena $a \in J$ dan $m \in M$. Sehingga $a \in Ann_R(M/JM)$. Dari sini diperoleh $J \subseteq Ann_R(M/JM) = Ann_R(M)$. Jadi $J \subseteq Ann_R(M)$.

Dengan demikian $Ann_R(M)$ adalah ideal prima, sehingga $\bar{R} = R/Ann_R(M)$ adalah ring prima.

Definisi 10: M R-modul disebut *prime* jika untuk setiap K submodul *fully invariant* dari M, berlaku $Ann_R(K) = Ann_R(M)$.

Definisi 9 dan Definisi 10 ekuivalen:

Diberikan $N = \{0\}$ adalah submodul prima di M. Diambil sebarang setiap K submodul *fully invariant* dari M. Karena $K \subseteq M$, maka $Ann_R(M) \subseteq Ann_R(K)$. Tinggal ditunjukkan $Ann_R(K) \subseteq Ann_R(M)$. Diambil sebarang $x \in Ann_R(K)$, maka $xk = 0$ untuk setiap $k \in K$. Sehingga $0 = xk \in N$. Karena N submodul prima, maka $k \in N$ atau $x \in Ann_R(M/N) = Ann_R(M/\{0\}) = Ann_R(M)$. Jika $k \in N = \{0\}$, maka $k = 0$ padahal $K \neq \{0\}$. Sehingga haruslah $x \in Ann_R(M)$. Jadi $Ann_R(K) \subseteq Ann_R(M)$.

Sebaliknya, diberikan untuk setiap K submodul *fully invariant* dari M, berlaku $Ann_R(K) = Ann_R(M)$. Ditunjukkan $N = \{0\}$ adalah submodul prima di M. Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm \in N = \{0\}$. Berarti $rm = 0$, yaitu $m \in N = \{0\}$ atau $r \in Ann_R(M) = Ann_R(M/\{0\}) = Ann_R(M/N)$. Jadi $N = \{0\}$ adalah submodul prima di M.

Proposisi 3: Untuk suatu modul M dan $S = End_R(M)$, pernyataan berikut ini ekuivalen:

(1) M modul prima

(2) $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk sebarang K submodul tak nol di M.

(3) $R/Ann_R(M)$ adalah K-cogenerated untuk sebarang K submodul tak nol di M.

(4) $R/Ann_R(M)$ adalah K-cogenerated untuk sebarang K submodul *fully invariant* tak nol di M.

Bukti:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Diberikan M modul prima. Ditunjukkan $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk sebarang K submodul tak nol dari M. Diambil sebarang K submodul tak nol di M. Dibentuk submodul $KS = \{kf | k \in K, f \in End_R(M)\}$. Claim: KS submodul *fully invariant* dari M, yaitu $(KS)g \subseteq KS$, dimana $g \in End_R(M)$ sebarang. Diambil sebarang $(k)f = kf \in KS$, maka $\big((k)f\big)g = (k)fg$. Karena $f \in End_R(M)$ dan $g \in End_R(M)$, maka $fg \in End_R(M)$. Sehingga $\big((k)f\big)g \in KS$. Jadi $(KS)g \subseteq KS$ atau KS submodul *fully invariant*.

Karena M modul prima dan KS submodul *fully invariant*, maka $Ann_R(KS) = Ann_R(M)$. Tinggal ditunjukkan $Ann_R(K) = Ann_R(KS)$. Diambil sebarang $x \in Ann_R(K)$ dan $kf \in KS$, berarti $xk = 0$ untuk setiap $k \in K$. Dari sini $(x)(kf) = (x)\big((k)f\big) = (xk)f = (0)f = 0$. Jadi $x \in Ann_R(KS)$ atau $Ann_R(K) \subseteq Ann_R(KS)$. Sebaliknya diambil sebarang $y \in Ann_R(KS)$, berarti $y \cdot kf = 0$ untuk setiap $kf \in KS$. Dari sini, $0 = y \cdot (k)f = (yk)f$. Karena $f \in End_R(M)$, maka haruslah $yk = 0$ atau $y \in Ann_R(K)$. Jadi $Ann_R(K) = Ann_R(KS)$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Diberikan $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk sebarang K submodul tak nol di M. Ditunjukkan $R/Ann_R(M)$ adalah K-cogenerated untuk sebarang K submodul tak nol di M.

Untuk sebarang M R-modul, claim bahwa $R/Ann_R(M)$ adalah M-cogenerated, yaitu terdapat monomorfisma $f: R/Ann_R(M) \longrightarrow M^{\wedge}$. Didefinisikan $f: R \longrightarrow M$ dengan $(r)f = rm$ untuk setiap $m \in M$, diperoleh $Ke\, f = \{r \in R | (r)f = 0\} = \{r \in R | rm = 0\} = \{r \in R | r \in Ann_R(M)\}$. Dari sini $g: R/Ann_R(M) \longrightarrow M^{\wedge}$ memiliki $Ke\, g = Ann_R(M) = \bar{0}$. Sehingga g monomorfisma. Jadi $R/Ann_R(M)$ adalah M-cogenerated. Karena $Ann_R(K) = Ann_R(M)$, maka $R/Ann_R(M)$ adalah K-cogenerated.

(3) $\Rightarrow$ (4)

Jelas, karena dari (3) diberikan $R/Ann_R(M)$ adalah K-cogenerated untuk sebarang K submodul tak nol di M, sehingga $R/Ann_R(M)$ juga adalah K-cogenerated untuk sebarang K submodul *fully invariant* tak nol di M.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Ditunjukkan M modul prima, yaitu $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk setiap K submodul *fully invariant* dari M. Karena $R/Ann_R(M)$ adalah K-cogenerated untuk sebarang K submodul *fully invariant* tak nol di M. Claim: K adalah faithful $R/Ann_R(M)$-modul, yaitu $Ann_{R/Ann_R(M)}(K) = \{0\}$.

$Ann_{R/Ann_R(M)}(K) = \big\{r + Ann_R(M) | \big(r + Ann_R(M)\big)K = 0\big\} = \big\{r + Ann_R(M) | \ \big(r + Ann_R(M)\big) \cdot k = 0,\ \forall k \in K\big\} = \{r + Ann_R(M) | r \cdot k + Ann_R(M) \cdot k = 0\} =$

$\{r + Ann_R(M) | r \cdot k + 0 = 0\} = \{r + Ann_R(M) | r \cdot k = 0\} = \{r + Ann_R(M) | r \in Ann_R(K)\} = \bar{0}$. Sehingga $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk sebarang K submodul *fully invariant* dari M.

Proposisi 4: Misalkan M adalah R-modul, $S = End_R(M)$, dan dinotasikan $\bar{R} = R/Ann_R(M)$.

(1) Jika M prima, maka $\bar{R}$ adalah ring prima.

(2) Jika $\bar{R}$ adalah ring prima dan $Ann_R(M/K) \not\subset Ann_R(M)$ untuk sebarang K submodul tak nol dari M, maka M modul prima.

Bukti:

(1) Diberikan M prima, berarti $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk setiap K submodul *fully invariant* dari M. Ditunjukkan $\bar{R}$ adalah ring prima. Dari proposisi 3 karena M modul prima, maka diperoleh $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk setiap K submodul dari M. Lebih lanjut dengan menggunakan proposisi 2, diperoleh $\bar{R} = R/Ann_R(M)$ ring prima.

(2) Diberikan $\bar{R}$ adalah ring prima. Dari proposisi 2 diperoleh $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ atau $Ann_R(M/K) = Ann_R(M)$ untuk sebarang submodul K dari M. Karena $Ann_R(M/K) \not\subset Ann_R(M)$ untuk sebarang K submodul tak nol dari M, maka haruslah $Ann_R(K) = Ann_R(M)$ untuk sebarang submodul K dari M. Dengan menggunakan proposisi 3, diperoleh M modul prima.

Akibat 2: Misalkan M adalah R-modul, $S = End_R(M)$, dinotasikan $\bar{R} = R/Ann_R(M)$, dan M adalah modul faithful:

Jika M prima, maka R adalah ring prima

Bukti:

Diberikan M prima dan M modul faithful, yaitu $Ann_R(M) = \{0\}$. Dari sini $\bar{R} = R/Ann_R(M) = R/\{0\} = R$. Sehingga dengan menggunakan proposisi 4, diperoleh $\bar{R} = R$ prima.

REFRENSI

I.E. Wijayanti, *Coprime Modules and Comodules*, Dissertation, University of D¨usseldorf, Germany, 2006.

R. Wisbauer, *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach: Philadelphia, 1991.

S. Arifin, *Multiplication Modules*, Thesis, University of Gadjah Mada, Yogyakarta, 2009.